به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
بهار ۱۴۰۳

نرم، گرام اشمیت، تبدیل خطی | **تمرین سوم** | تاریخ انتشار: ۲۳ فروردین ۱۴۰۳

---

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به‌صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده‌ی کلی با یک‌دیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما توسط خود دانشجو انجام شود. **حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.**

سوالات تئوری (۱۰۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۲ اردیبهشت ۱۴۰۳

پرسش ۱ (۱۵ نمره) درستی یا نادرستی هر یک گزاره های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

(آ) دو بردار عمود بر هم مستقل خطی هستند.

(ب) اگر $\|u-v\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2$ آنگاه بردار های u و v بر هم عمود هستند.

(ج) فرض کنید $u, v \in V$ به طوری هستند که $\|u\| = \|v\| = 1$ و $\langle u, v\rangle = 1$ پس $u = v$ است.

پاسخ

(آ) نادرست. بردار صفر بر هر برداری عمود است اما بردار صفر و هر بردار دیگری وابسته خطی هستند زیرا $0 \langle = \langle\langle u,v\rangle \langle then \langle 0 \rangle = \quad u$

(ب) درست است زیرا

$$\begin{aligned}\{||u-v||\}^2 &= \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= ||u||^2 + ||v||^2 - 2\langle u,v\rangle = \{\|u\|\}^2 + \{\|v\|\}^2\end{aligned}$$

پس نتیجه میگیریم که $\langle u,v\rangle = 0$ و این دو بردار بر هم عمودند.

(ج) درست است زیرا

$$||u-v||^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle = 0$$

که نتیجه میدهد $u = v = 1$

پرسش ۲ (۱۵ نمره) با توجه به تعریف ضرب داخلی برای دو تابع $f(x),\ g(x)$ یک کران بالا برای I بر حسب n و m پیدا کنید.

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^1 f(x).g(x)\, dx$$

$$I = \int_0^1 \sqrt[n]{xe^{mx}}\, dx \qquad n, m \in \mathbb{N}$$

پاسخ اگر فرض کنیم $f(x) = x^{\frac{1}{n}}, g(x) = e^{\frac{m}{n}x}$ آنگاه داریم $I = \langle f(x), g(x)\rangle$

از طرفی بر اساس نامساوی کوشی شوارتز داریم:

$$I^2 \le \langle f(x), f(x)\rangle . \langle g(x), g(x)\rangle$$

$$\langle f(x), f(x)\rangle = \int_0^1 x^{\frac{2}{n}}\, dx = \frac{x^{(\frac{2}{n}+1)}}{\frac{2}{n}+1} = \frac{n}{n+2}$$

$$\langle g(x), g(x)\rangle = \int_0^1 e^{\frac{2mx}{n}}\, dx = \frac{e^{(\frac{2mx}{n})}}{\frac{2m}{n}} = \frac{n}{2m}(e^{\frac{2m}{n}-1})$$

$$I^2 \le \frac{n^2}{(n+2)2m}(e^{\frac{2m}{n}-1}))$$

$$I \le n\sqrt{\frac{e^{\frac{2m}{n}-1}}{(n+2)2m}}$$

پرسش ۳ (۲۰ نمره) فرض کنید C یک زیرفضا از V است با این ویژگی که به ازای هر $u, v \in C$ داریم $\frac{1}{2}(u+v) \in C$. به ازای بردار دلخواه $w \in V$ فقط یک نزدیک ترین بردار به آن درون C وجود دارد. به عبارتی دیگر، حداکثر یک u وجود دارد به طوری که $\|w-u\| \le \|w-v\|$ $\forall v \in C;$

پاسخ با برهان خلف فرض می کنیم که دو بردار $x \neq y$ با این ویژگی وجود دارند پس $||w-x|| = ||w-y||$

طبق فرض صورت سوال بردار $\frac{1}{2}(x+y)$ نیز درون C قرار دارد. از آنجایی که بردار های x و y نزدیک ترین بودند، این بردار باید فاصله بیشتری نسبت به آنها تا w داشته باشد.

$$\begin{aligned}
||w-\frac{1}{2}(x+y)||^2 &= ||\frac{1}{2}(w-x)+\frac{1}{2}(w-y)||^2 \\
&= \frac{||w-x||^2}{2}+\frac{||w-y||^2}{2}-\frac{||x-y||^2}{4} \\
&= ||w-x||^2-\frac{||x-y||^2}{4} \le ||w-x||^2
\end{aligned}$$

میبینیم که این بردار بر خلاف فرض انجام شده، از x و y به w نزدیک تر است. پس فرض اشتباه بوده و نمیتواند بیشتر از یک بردار نزدیک ترین به w وجود داشته باشد.

پرسش ۴ (۲۵ نمره) نشان دهید بردار های $v_1, \ldots, v_m$ وابسته خطی هستند اگر و تنها اگر با اجرای پروسه گرام اشمیت روی آنها، حداقل یک بردار صفر تولید شود. به عبارتی دیگر اگر با اجرای این پروسه به ترتیب بردار های $q_1, \ldots, q_m$ تولید شوند، آنگاه داریم $\exists\, i\ s.t.\ q_i = 0$

پاسخ ابتدا نشان می دهیم که اگر یک q_i برابر با صفر داشته باشیم، بردار ها وابسته خطی هستند.

اگر $i=1$ باشد آنگاه یعنی $q_i=0, v_i=0$ است. از آنجایی که مجموعه ما فقط یک بردار صفر دارد پس وابسته خطی است.

اگر $i \ge 1$ آنگاه داریم $q_1, \ldots, q_{i-1} \ne 0,\ q_i = 0$ پس داریم $\tilde{q_i}=0,\ \tilde{q_i}=v_i-\langle q_1,a_i\rangle q_1-\ldots-\langle q_{i-1},a_i\rangle q_{i-1}$

پس بردار v_i را می توان به صورت یک ترکیب خطی از بردار های $q_1, \ldots, qi-1$ نوشت $v_i=\langle q_1,a_i\rangle q_1+\ldots+\langle q_{i-1},a_i\rangle q_{i-1}$

کافی است ثابت کنیم به ازای هر $k \le i$ q_k را می توان به صورت یک ترکیب خطی از بردار های $v_1, \ldots, v_k$ نوشت. برای این منظور با استقرا پیش میرویم. پایه: $q_1=\frac{1}{||v_1||}v_1$ حال از آنجایی که $q_k=\frac{\tilde{q_i}}{||\tilde{q_i}||}$ و همچنین از قبل به دست آوردیم که $q_i=\frac{1}{||\tilde{q_i}||}v_i-\langle q_1,a_i\rangle q_1-\ldots-\langle q_{i-1},a_i\rangle q_{i-1}$ هر یک از $q_j,\ j<i$ های رابطه قبل طبق گام استقرا به صورت ترکیب خطی از بردار های $v_1, \ldots, v_j$ به دست می آید. بنابراین بردار q_i نیز به صورت ترکیب خطی از بردار های $v_1, \ldots, v_i$ به دست می آید. از طرفی داشتیم که $v_i=\langle q_1,a_i\rangle q_1+\ldots+\langle q_{i-1},a_i\rangle q_{i-1}$ پس بردار v_i به صورت یک ترکیب خطی از بردار های $v_1, \ldots, v_{i-1}$ میتواند نوشته شود. پس مجموعه بردار های v وابسته اند. حال باید ثابت کنیم که اگر مجموعه بردار های v وابسته باشند، آنگاه پروسه گرام اشمیت حداقل یک بردار $q_i=0$ تولید می کند. حال با استفاده از برهان خلف فرض می کنیم که بردار های $q_1, \ldots, q_k$ ناصفر هستند. ادعا میکنیم که برای این منظور، باید بردار های $v_1, \ldots, v_k$ مستقل خطی باشند. برای اثبات این ادعا با استفاده از استقرا پیش میرویم. پایه: اگر $q_1 \ne 0$ آنگاه داریم $v_1 \ne 0$ یعنی بردار های v مستقل خطی اند. برای حالت کلی تر $q_1, \ldots, q_k$ های نا صفر، میدانیم طبق گام استقرا بردار های $v_1, \ldots, v_{k-1}$ مستقل خطی اند. حال برای اینکه بردار های $v_1, \ldots, v_k$ بخواهند وابسته باشند باید بتوانیم v_k را به صورت ترکیب خطی بقیه بردار ها به دست آوریم. از قبل دانستیم که $\tilde{q_k}=v_k-\langle q_1,a_i\rangle q_1-\ldots-\langle q_{k-1},a_k\rangle q_{k-1}$ و همچنین می دانیم هر یک از q_j های رابطه قبل یک ترکیب خطی از بردار های $v_1, \ldots, v_j$ است. پس با توجه به موارد گفته شده، q_k نیز به صورت یک ترکیب خطی از بردار های $v_1, \ldots, v_{k-1}$ به دست می آید. پس همه بردار های $q_1, \ldots, q_k$ از $span(v_1, \ldots, v_{k-1})$ به دست می آیند. پس بردار های q_i نمیتوانند مستقل خطی باشند زیرا $basis$ این فضای برداری به دست آمده از $span$ $k-1$ تا بردار دارد ولی تعداد q_i ها برابر با k است.

پرسش ۵ (۲۵ نمره) فرض کنید b و c اعداد حقیقی باشند. تبدیل خطی T را به صورت $T:\ \mathcal{P}(R) \to R^2$ تعریف می کنیم به طوری که:

$$T_p\ =\ (3p(4)+5p'(6)+bp(1)p(2), \int_{-1}^{2} x^3p(x)dx+c\sin(p(0)))$$

اثبات کنید T یک تبدیل خطی است اگر و تنها اگر $b=c=0$.

پاسخ ابتدا اثبات می کنیم که اگر T خطی باشد آنگاه $b=c=0$ است. از آنجایی که T خطی است پس خاصیت $additivity$ برای هر $p,q \in p(\mathbb{R})$ برقرار است. از آنجایی که این خاصیت برای همه توابع برقرار است، p,q را به صورت زیر تعریف می کنیم. $p(x)=\frac{\pi}{2}\ ,\ q(x)=\frac{\pi}{2}\ \ \forall x \in \mathbb{R} \to p'(x)=0, q'(x)=0 \forall x \in \mathbb{R}$ طبق خاصیت $additivity$ برای آنها می نویسیم:

$$\begin{aligned}
T(p+q) &= (3(p+q)(4)\ +\ 5(p+q)'(6)\ +\ b(p+q)(1)(p+q)(2),\ \int_{-1}^{2}\ x^3(p+q)(x)\ dx\ +\ c\ \sin((p+q)(0))) \\
&= (3(p(4)+q(4))+\ 5(p'(6)+q'(6))+b(p(1)+q(1))(p(2)+q(2)),\ \int_{-1}^{2}\ x^3(p(x)+q(x))\ dx+c\sin(p(0)+q(0))) \\
&= (3(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})+5(0+0)+b(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}),\ \int_{-1}^{2}\ x^3(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})\ dx+c\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})) \\
&= (3\pi+\pi^2b,\ \frac{15\pi}{4})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T_p \;+\; T_q \;&= ((\text{۳}p(\text{۴}) \;+\; \text{۵}p^{'}(\text{۶}) \;+\; bp(\text{۱})p(\text{۲})\Big), \int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}}\; p(x)\; dx \;+\; c\; \sin p(\text{۰}))\\
&+ ((\text{۳}q(\text{۴}) \;+\; \text{۵}q^{'}(\text{۶}) \;+\; bq(\text{۱})q(\text{۲})\Big), \int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}}\; q(x)\; dx \;+\; c\; \sin q(\text{۰}))\\
&= ((\text{۳}\left(\frac{\pi}{\text{۲}}\right) + \text{۵}(\text{۰})\Big) + b\left(\frac{\pi}{\text{۲}}\right)\left(\frac{\pi}{\text{۲}}\right), \int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}}\left(\frac{\pi}{\text{۲}}\right) dx \;+\; c\; \sin\left(\frac{\pi}{\text{۲}}\right))\\
&+ ((\text{۳}\left(\frac{\pi}{\text{۲}}\right) + \text{۵}(\text{۰})\Big) + b\left(\frac{\pi}{\text{۲}}\right)\left(\frac{\pi}{\text{۲}}\right), \int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}}\left(\frac{\pi}{\text{۲}}\right) dx \;+\; c\sin\left(\frac{\pi}{\text{۲}}\right))\\
&= \left(\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲}} + \frac{\pi b}{\text{۴}}, \frac{\pi}{\text{۲}}\int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}}\, dx \;+\; c\right) + \left(\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲}} + \frac{\pi b}{\text{۴}}, \frac{\pi}{\text{۲}}\int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}}\, dx \;+\; c\right)\\
&= (\text{۳}\pi + \frac{\pi b}{\text{۲}}, \frac{\text{۱۵}\pi}{\text{۴}} \;+\; \text{۲}c)
\end{aligned}
$$

طبق خاصیت $additivity$ باید این دو مقدار با یکدیگر برابر باشند.

$$\left(\text{۳}\pi + \pi^{\text{۲}}b, \frac{\text{۱۵}\pi}{\text{۴}}\right) = T(p+q) = Tp \;+\; Tq \;=\; \left(\text{۳}\pi + \frac{\pi b}{\text{۲}}, \frac{\text{۱۵}\pi}{\text{۴}} \;+\; \text{۲}c\right)$$

که نتیجه میدهد:

$$[\text{۳}\pi + \pi^{\text{۲}}b = \text{۳}\pi + \frac{\pi b}{\text{۲}}], [\frac{\text{۱۵}\pi}{\text{۴}} = \frac{\text{۱۵}\pi}{\text{۴}} + \text{۲}c] \rightarrow [b = c = \text{۰}]$$

حال میخواهیم ثابت کنیم اگر $b = c = \text{۰}$ باشد آنگاه T یک تبدیل خطی است. در این صورت داریم $T : R \rightarrow R^{\text{۲}}$

$$T_p = \left(\text{۳}p(\text{۴}) + \text{۵}p'(\text{۶}), \int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}}p(x)\, dx\right)$$

برای اثبات خطی بودن T باید خاصیت های $Additivity$ و $Homogeneity$ را برای آن اثبات کنیم.

$$
\begin{aligned}
T(p+q) &= \left(\text{۳}(p+q)(\text{۴}) + \text{۵}(p+q)^{'}(\text{۶}), \int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}}(p+q)(x)dx\right)\\
&= \left(\text{۳}p(\text{۴}) + \text{۳}q(\text{۴}) + \text{۵}(p^{'}(\text{۶}) + q^{'}(\text{۶})), \int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}}p(x)dx + \int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}}q(x)dx\right)\\
&= \left(\text{۳}p(\text{۴}) + \text{۵}p^{'}(\text{۶}), \int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}}p(x)dx\right) + \left(\text{۳}q(\text{۴}) + \text{۵}q^{'}(\text{۶}), \int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}}q(x)d\right)\\
&= Tp + Tq
\end{aligned}
$$

برای هر $\lambda \;\in\; F$ داریم:

$$
\begin{aligned}
T(\lambda p) &= \left(\text{۳}(\lambda p)(\text{۴}) + \text{۵}(\lambda p)^{'}(\text{۶}), \int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}}(\lambda p)(x)dx\right)\\
&= ((\text{۳}\lambda p(\text{۴}) + \text{۵}\lambda p^{'}(\text{۶})\Big), \int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}}\lambda p(x)dx)\\
&= (\lambda\left(\text{۳}p(\text{۴}) + \text{۵}\lambda p^{'}(\text{۶})\right), \lambda\int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}}p(x)dx)\\
&= \lambda((\text{۳}p(\text{۴}) + \text{۵}\lambda p^{'}(\text{۶})\Big), \lambda\int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}}p(x)dx)\\
&= \lambda T_p
\end{aligned}
$$